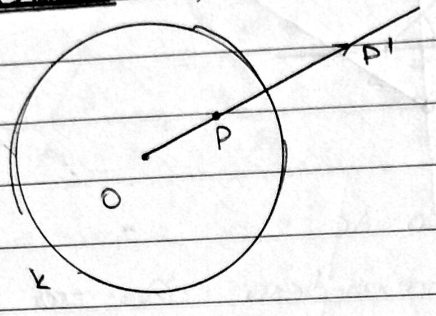
13/11/2018

6ο ΜΑΘΗΜΑ

§ ΚΥΚΛΙΚΗ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω, κ: κύκλος με κέντρο το O και ακτίνα r.



Για κάθε σημείο $P \neq O$ θεωρώ το ευθύγραμμο τμήμα OP.
Έστω P' το μοναδικό σημείο επί της ημιευθείας OP έτσι ώστε

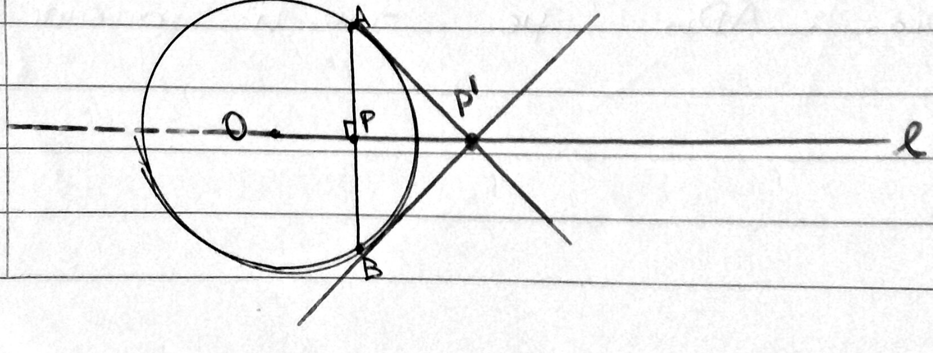
(*) $OP \cdot OP' = r^2 \Leftrightarrow OP' = r^2/OP$

- Το σημείο P': καλά ορισμένο και λέγεται αντίστροφο του P ως προς τον κύκλο κ.
- Το σημείο O: λέγεται κέντρο αντιστροφής και ο αριθμός r: λέγεται ακτίνα αντιστροφής.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Από την (*): ορίζεται μια απεικόνιση $C_\kappa: \mathbb{R}^2 - \{O\} \to \mathbb{R}^2 - \{O\}$ ως εξής: $C_\kappa(P) = P' \Rightarrow C_\kappa(C_\kappa(P)) = C_\kappa(P') = P$

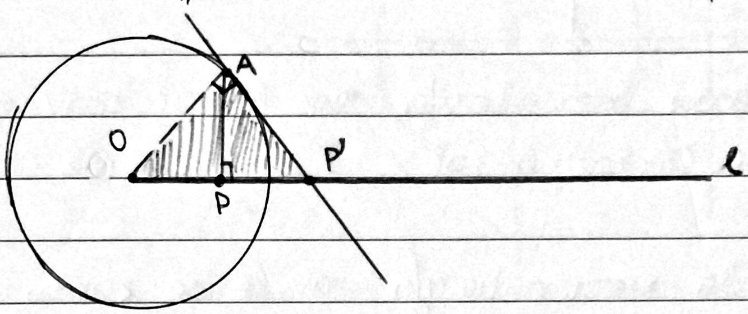
* Άρα, $C_\kappa \circ C_\kappa = I \Leftrightarrow C_\kappa = C_\kappa^{-1}$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω κ: κύκλος με κέντρο O και ακτίνα r και σημείο $P \neq O$ εντός του κύκλου.



- Ας συμβολίσουμε με AB τη χορδή του του κ που είναι κάθετη στην ημιευθεία ℓ με αρχή το O που διέρχεται από το P
- Τότε, οι εφ/νες του κ στα σημεία A, B θα συναντηθούν επί της ℓ σε ένα σημείο P'
- $OP \cdot OP' = r^2$
- Έχω, συμμετρία.

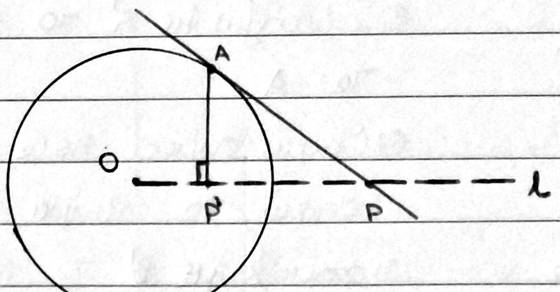
[ΑΠΟΔΕΙΞΗ]: Λόγω συμμετρίας οι εφ/νες ευθείες του κύκλου από τα A και B θα συναντηθούν σε σημείο $P' \in \ell$.



- Ας θεωρήσουμε τα ορθογώνια τρίγωνα: OAP και OAP' είναι όμοια

→ Επομένως, $\dfrac{OA}{OP} = \dfrac{OP'}{OA} \Leftrightarrow OP \cdot OP' = OA^2 = r^2 \Rightarrow OP \cdot OP' = r^2$.

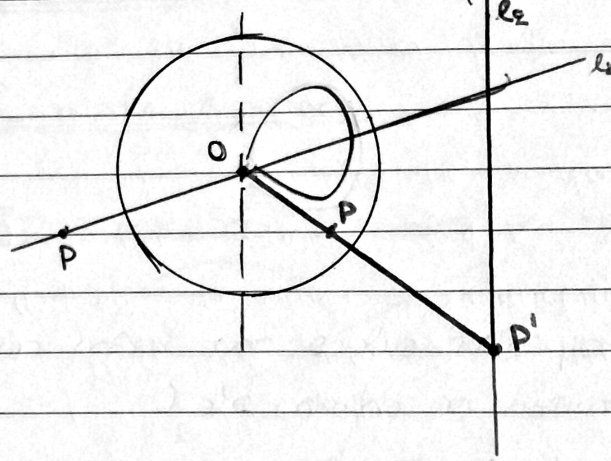
ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω κ: κύκλος με κέντρο O και ακτίνα r.
Έχω σημείο P: εκτός κύκλου



Θεωρήσαμε ημιευθεία ℓ με αρχή O που διέρχεται από το P
Θεωρήσαμε εφ/πτη PA προς τον κύκλο
Η ορθογώνια προβολή του A πάνω στον ℓ είναι το σημείο P' με την ιδιότητα: $OP' \cdot OP = r^2$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω, κύκλος K με κέντρο O

Έστω, l_1: ευθεία που διέρχεται από το O και l_2: ευθεία που δεν διέρχεται απ' το O.

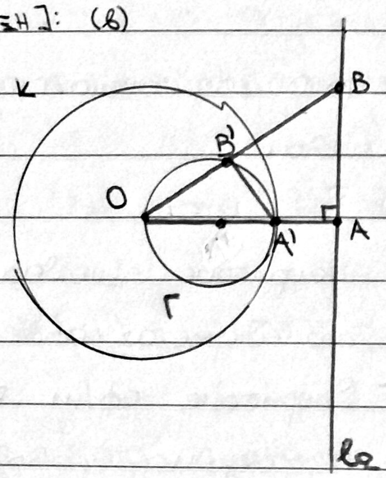


Τότε, (α) η αντιστροφή μετασχηματίζει την $l_1-\{O\}$ στον εαυτό της, δηλαδή : $\alpha_K(l_1-\{O\})=l_1-\{O\}$

(β) Η αντιστροφή θα μετασχηματίζει την l_2 σε κύκλο που διέρχεται απ' το μηδέν.

$\alpha_K(l_2)\subseteq \Gamma$ που διέρχεται από το O

[ΑΠΟΔΕΙΞΗ]: (β)



- Ας συμβολίσουμε με A την ορθογώνια προβολή του O πάνω στην ευθεία l.
- Συμβολίζω με A' το αντίστροφο του A.
- Θεωρώ, σημείο $B\in l_2$. Θεωρώ, το τμήμα OB και ασυμβολίζουμε B' το σημείο τομής του OB με τον κύκλο Γ.

- Θ.δ.ο $OB\cdot OB' = r^2$
- $\left.\begin{matrix} O\hat{A}B \\ O\hat{A'}B' \end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} O\hat{B'}A' = O\hat{A}B \\ O\hat{B}A = A\hat{O}B \\ O\hat{B}A = O\hat{A'}B' \end{matrix}\right\} \Rightarrow \dfrac{OB}{OA'} = \dfrac{OA}{OB'}$

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ: Η αντιστροφή μετασχηματίζει τα σημεία της ℓ στον κύκλο Γ με διάμετρο το Α

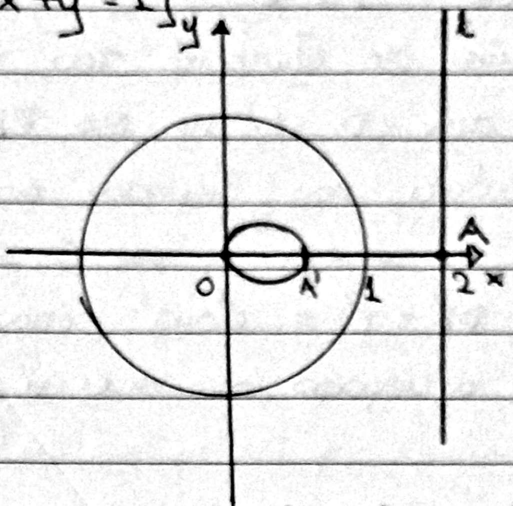
$\Rightarrow OB \cdot OB' = OA \cdot OA' = r^2$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1) Έστω, $k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$

και

$\ell : x = 2$.



- Η ορθογώνια προβολή του $O(0,0)$ απ' την ℓ είναι το σημείο $A(2,0)$
- Ας βρω το $A'(a,0)$

  $1 = OA \cdot OA' \iff 1 = 2 \cdot a \iff a = \frac{1}{2}$
- Τότε, $\Gamma = C_k(\ell)$: κύκλος με διάμετρο το OA'

  $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-\frac{1}{4})^2 + y^2 = \frac{1}{16}\}$

2. ΤΟΜΗ ΚΥΚΛΩΝ

- Έστω, k_1, k_2: 2 κύκλοι που τέμνονται
- Ορίζουμε, την γωνία μεταξύ k_1, k_2: Την γωνία που σχηματίζουν οι εφ/νες ευθείες στα αντίστοιχα σημεία τομής.
- Έστω, k: κύκλος με κέντρο O και ακτίνα r
- Έστω, σημείο $D \notin k$.

(i) Έστω, D: ανήκει στο εξωτερικό του k

Φέρω, από την D εφ/νη στο DB προς τον κύκλο

Έστω, l: ευθεία που διέρχεται από το D και τέμνει τον κύκλο σε σημεία A και C

$\Rightarrow AD \cdot CD = DB^2 = r^2 = d^2_{O(k)}$, όπου $\delta_{O(k)} = dist(O, D)$.

[Ισχύει, το αντίστροφο, αν ισχύει η ισότητα $\Rightarrow DB$: εφ/νη.

(ii) Έστω, D: Εσωτερικό σημείο του k.

Φέρω, δυο χορδές από το D, που τέμνουν το k στα σημεία A, B και P, C

$$\Rightarrow AD \cdot DB = PD \cdot CD = r^2 - \delta^2_{O(k)}.$$

- $\mu = \delta^2_{O(k)} - r^2$: ΔΥΝΑΜΗ ΤΟΥ D ΩΣ ΠΡΟΣ k

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω, k_1, k_2: δύο ορθογώνιοι κύκλοι

Τότε, η εικόνα του k_1 μέσω της αντιστροφής ως προς

του κύκλο k_2 είναι ξανά ο k_1.

Αντίστροφα, αν ένας κύκλος k_1: περιέχει ζεύγος αντίστροφων

σημείων A, A' ως προς την k_2

$\Rightarrow$ Ο k_1: ορθογώνιος με τον k_2